

$$ax^2 + by^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mid ax^2 + by^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mid f(x, y) = 0\}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon$$

$$t_c: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$c_0 = (c_1, c_2) \quad t_c(v) = c_0 + v \quad \forall v \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$\forall \varepsilon \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Εστω } c' = c_0 = t_c^{-1}(c) \quad , \quad c' \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$\text{Εστω } u \in c_0, u \in t_c^{-1}(c) \Rightarrow t_c(u) \in C$$

$$\text{Εστω } u = (u_1, u_2)$$

$$t_c(u) = c_0 + u = (c_1 + u_1, c_2 + u_2) \in C \quad \text{Αρα } f(c_1 + u_1, c_2 + u_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(c_1 + u_1)^2 + b(c_2 + u_2)^2 + \gamma(c_1 + u_1) + \delta(c_2 + u_2) + \varepsilon = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(c_1^2 + u_1^2 + 2c_1 u_1) + b(c_2^2 + u_2^2 + 2c_2 u_2) + \gamma c_1 + \gamma u_1 + \delta c_2 + \delta u_2 + \varepsilon = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow au_1^2 + bu_2^2 + (2ac_1 + \gamma)u_1 + (2bc_2 + \delta)u_2 + (ac_1^2 + bc_2^2 + \gamma c_1 + \delta c_2 + \varepsilon) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow au_1^2 + bu_2^2 + (2ac_1 + \gamma)u_1 + (2bc_2 + \delta)u_2 + f(c_0) = 0$$

$$C'_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mid ax^2 + by^2 + (2ac_1 + \gamma)x + (2bc_2 + \delta)y + f(c_0) = 0 \right\}$$

Αρα $u \in C_0$

$$\text{Τότε } \tilde{x} = (x, y) \in C_0 \Rightarrow t_0(\tilde{x}) \in C \Leftrightarrow \tilde{x} \in t_0^{-1}(C)$$

$$\boxed{\text{Συνεπώς } C'_0 = C_0}$$

$$2ac_1 + \gamma = 0$$

$$2bc_2 + \delta = 0$$

$$1) a, b \neq 0 \quad \text{Τότε} \quad \left. \begin{array}{l} c_1 = -\frac{\gamma}{2a} \\ c_2 = -\frac{\delta}{2b} \end{array} \right\} \Rightarrow C_0 = \left(-\frac{\gamma}{2a}, -\frac{\delta}{2b} \right)$$

Η καμπύλη C_0 παίρνει την εξίσωση $ax^2 + by^2 + f(c_0) = 0$

$$C_0 = t_0^{-1}(C) \Rightarrow C = t_0 C_0$$

$$2) a = 0, b \neq 0$$

$$by^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0$$

$$C_0 : by^2 + \gamma x + (2bc_2 + \delta)y + f(c_0) = 0$$

$$\rightarrow \text{Αν } \gamma \neq 0 \Rightarrow 2bc_2 + \delta = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{\delta}{2b}$$

και από την $f(c_0) = 0$ παίρνουμε c_1

Αρα παίρνουμε την εξίσωση $by^2 + \gamma x = 0$ (παράβολοι)

$$y^2 = -\frac{\gamma}{b}x$$

$$\rightarrow \text{An } y=0 \Rightarrow by^2 + (2bc_2 + \delta)y + f(c) = 0$$

(Δευτεροβάθμια ως προς y) $\Rightarrow$ - Κενό σύνολο

• 1 σύνολο

• 2 σύνολα

Άρα το σύνολο C_{y_0} θα είναι - Κενό

• ~~1~~ σύνολο

• 2 σύνολα.

Αντίστροφα βρισκαμε και για $a \neq 0$, $\theta = 0$ αν και η παραβολή

θα είναι της μορφής $x^2 = d \cdot y$, $d = \frac{ca}{a^2}$

~~Επίσης~~

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ δ.γ με εσωτερικό γινόμενο και απεικόνιση $T: V \rightarrow V$
αποκαλείται **ισομετρία** εάν ισχύει $\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$ $\forall u, v \in V$
Ειδικές μορφές είναι οι γραμμικές ισομετρίες. Συνολικά οι ισομετρίες
που είναι γραμμικές απεικονίσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $c_0 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. Η $t_{c_0}: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ είναι ισομετρία.

Απόδειξη

Έστω $u, v \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$\|t_{c_0}(u) - t_{c_0}(v)\| = \|(c_0 + u) - (c_0 + v)\| = \|u - v\|$$

Άρα t_{c_0} ισομετρία.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η σύνθεση ισομερικών είναι ισομερική

Απόδειξη

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ε.γ. με εσωτερικό γινόμενο και έστω $T_1: V \rightarrow V$
και $T_2: V \rightarrow V$ να είναι δύο ισομερίες

Έστω $u, v \in V$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \| (T_1 \circ T_2)(u) - (T_1 \circ T_2)(v) \| &\stackrel{\text{εξισ. 1.1.1}}{=} \| T_1(T_2(u)) - T_1(T_2(v)) \| \stackrel{\text{εξισ. 1.1.1}}{=} \\ &= \| T_2(u) - T_2(v) \| \stackrel{\text{εξισ. 1.1.1}}{=} \| u - v \| \quad \forall u, v \in V \Rightarrow T_1 \circ T_2 \text{ ισομερία} \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Μια ισομερία είναι αντιστροφή 1-1

Απόδειξη

Έστω $u, v \in V$ και $T: V \rightarrow V$ μια ισομερία στον $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Έστω $T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = 0 \Rightarrow \|T(u) - T(v)\| = \|0\| = 0$ ε

$\Rightarrow \|u - v\| = 0 \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v \Rightarrow T$ 1-1

ΠΡΟΤΑΣΗ

Οι μετασχηματισμοί είναι επί

Απόδειξη

Έστω $t_{c_0}: V \rightarrow V$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Έστω $v_0 \in V$ αυθ. τότε $t_{c_0}(v_0 - c_0) = (v_0 - c_0) + c_0 = v_0$

Άρα t_{c_0} επί

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ δ.γ με εσωτερικό γινόμενο

Έστω $a > 0$ και 2 ευθείες E_1, E_2 του V με $d(E_1, E_2) = \|E_1 - E_2\| = 2\delta$.

• $\delta > 0$ με $a > \delta$.

Τότε ορίζουμε ελάχιστη $C_{E_1, E_2, a} = \{u \in V \mid d(u, E_1) + d(u, E_2) = 2a\}$

όπου $d(u, E_i) = \|u - E_i\|$ *

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ δ.γ με εσωτερικό γινόμενο $C_{E_1, E_2, a}$ με ελάχιστη του V και $T: V \rightarrow V$ μια ισομετρία επι.

Τότε ισχύει ότι $T(C_{E_1, E_2, a}) = (T(E_1), T(E_2), a)$

* Τα E_1, E_2 συνιστούν εστίες της ελάχιστης, το $\|E_1 - E_2\| = 2\delta$ συνιστούν ελάχιστη απόσταση και το $2a$ είναι το σταθερό αθροισμα

Απόδειξη

Έστω $u \in C_{E_1, E_2, a}$. Τότε επί ορισμού της ελάχιστης ισχύει

$$\|u - E_1\| + \|u - E_2\| = 2a \Rightarrow \|T(u) - T(E_1)\| + \|T(u) - T(E_2)\| = 2a$$

Άρα $T(u) \in (T(E_1), T(E_2), a)$

Ισχύει $\|T(E_1) - T(E_2)\| = \|E_1 - E_2\| = 2\delta < 2a$

$$\text{Άρα έχουμε } T(C_{E_1, E_2, a}) \subseteq (T(C_{E_1}), T(C_{E_2}), a) \quad (1)$$

$$\text{Έστω τώρα } u' \in (T(C_{E_1}), T(C_{E_2}), a)$$

$$\text{Τότε } \|u' - T(C_{E_1})\| + \|u' - T(C_{E_2})\| = 2a.$$

$$\text{Από το } T \text{ είναι ότι υπάρχει } w \in V : T(w) = u'$$

$$\text{Άρα } \|T(w) - T(C_{E_1})\| + \|T(w) - T(C_{E_2})\| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|w - E_1\| + \|w - E_2\| = a \Rightarrow w \in C_{E_1, E_2, a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(w) \in T(C_{E_1, E_2, a}) \Leftrightarrow u' \in T(C_{E_1, E_2, a}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (T(C_{E_1}), T(C_{E_2}), a) \subseteq T(C_{E_1, E_2, a}) \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2) έχω ότι } T(C_{E_1, E_2, a}) \subseteq (T(C_{E_1}), T(C_{E_2}), a)$$

Άρα για μετασχηματισμούς του αστεριού επιτίθενται σε επιτίθενται
 Παράδειγμα για παραβολές, υπερβολές, ελλείψεις και ευθείες

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 2 = 0$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 2 = 0\}$$

$$C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mid A_2 x^2 + A_2 y^2 + b_0 x + b_0 y + 2 = 0\}$$

$$C = g^{-1}(C') \text{ όπου } g^{-1} \text{ είναι ισομετρία γραμμική επί}$$

$$C'' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mid ax^2 + by^2 + d = 0 \}$$

$$C' = t_{C_0}(C'')$$

$$\text{Άρα } C = g^{-1}(t_{C_0}(C'')) = (g^{-1} \circ t_{C_0})(C'')$$

Άρα αν C'' είναι έλλειψη τότε και C είναι έλλειψη

Είπαμε πάλι $g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ $g(x, y) = (x, y) P^T$ ~~και~~
όπου P : ορθογώνιος πίνακας

$$\text{Ορίζω } \tilde{g}: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad \tilde{g}(x, y) = (x, y) \cdot P$$

$$(g \circ \tilde{g})(x, y) = g(\tilde{g}(x, y)) = g((x, y) \cdot P) = ((x, y) P) P^T =$$

$$= (x, y) (P P^T) = (x, y) (P \cdot P^{-1}) = (x, y)$$

P ορθογώνιος
 $\Rightarrow P^T = P^{-1}$

$$\text{Άρα } (g \circ \tilde{g})(x, y) = \text{id}_{\mathbb{R}^{1 \times 2}}$$

$$\text{όπου } \text{id}_{\mathbb{R}^{1 \times 2}}: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad \mu\epsilon \quad \text{id}_{\mathbb{R}^{1 \times 2}}(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$\text{Άρα } \tilde{g} = g^{-1} \Rightarrow g^{-1}(x, y) = (x, y) P \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Άρα P ορθογώνιος και $\circ g^{-1}$ είναι απλά μια μορφή $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{g^{-1} \text{ ισχυρίζεται}}$$

$$\bullet f \circ g_1(x, y) + \delta \circ g_2(x, y) = a_0 x + b_0 y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$a_0, b_0 \text{ γνωστά} \quad g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$$

g ισομετρία πελάτη

$$g_1 = Pr_1 \circ g, \quad g_2 = Pr_2 \circ g$$

Ψάχνουμε f_0, δ_0 ώστε να ισχύει $(*)$

Τότε ορίζεται $\eta \quad T: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ με $\omega \eta \quad T(x, y) = f_0 x + \delta_0 y$

$\eta \quad T$ είναι πελάτη $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$\text{Εφαρμόζοντας } (T \circ g)(x, y) = T(g(x, y)) = T(g_1(x, y), g_2(x, y)) =$$

$$= f_0 g_1(x, y) + \delta_0 g_2(x, y) = a_0 x + b_0 y$$

Εστω $f: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$, f πελάτη με $\omega \eta \quad f(x, y) = a_0 x + b_0 y$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$\text{Τότε } T \circ g = f \Rightarrow (T \circ g) \circ g^{-1} = f \circ g^{-1} \Rightarrow T \circ (g \circ g^{-1}) = f \circ g^{-1} \Rightarrow$$

$$T \circ \text{id}_{\mathbb{R}^{1 \times 2}} = f \circ g^{-1} \Rightarrow \boxed{T = f \circ g^{-1}}$$

Παράβολα

1) $y^2 = 2p x$. Το p ονομάζεται παραμέτρος $p > 0$ ή $p < 0$

Εξαια $E = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ $x = -\frac{p}{2}$ ± διακεκωμένη Δ

-5-

$$M: d(M, \Delta) = d(M, E)$$

2) $x^2 = 2py$

$$E = \left(0, \frac{p}{2}\right) \quad y = -\frac{p}{2} \text{ διακεκωμένη}$$

Ελλειψη

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $f^2 = a^2 - b^2$ με $a > b$

2f: εστιακή απόσταση $= \|E_1 - E_2\|$

$$E_1 = (-f, 0) \quad E_2 = (f, 0)$$

2a: $d(M, E_1) + d(M, E_2)$ $\forall M$ ανήκει στο ελλειψοειδές

2) $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ $f^2 = a^2 - b^2$ $a > b$

$$E_1 = (0, f) \quad E_2 = (0, -f)$$

Υπερβολή

1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $f^2 - a^2 = b^2$ $f > a$

2f: εστιακή απόσταση

2a: η απόσταση από τις διακλάσεις

$$M: |d(M, E_1) - d(M, E_2)| = 2a$$

$$E_1 = (\gamma, 0) \quad E_2 = (-\gamma, 0)$$

$$2) \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$E_1 = (0, \gamma) \quad E_2 = (0, -\gamma) \quad \gamma^2 a^2 = b^2$$

$$2\gamma = \|E_1 - E_2\|$$

$$u: |d(u, E_1) - d(u, E_2)| = 2a$$

Κανονική Ισότητα Ελλειψης

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο διαστάσεως 2.

Έστω $\beta = \{u_1, u_2\}$ μια ορθοκανονική βάση του

Έστω $a > 0, \gamma > 0, a > \gamma$ θεωρούμε τα $E_1 = \gamma u_1, E_2 = \gamma u_2$

και ορίζουμε το σύνολο $C = \{u \in V \mid d(u, E_1) + d(u, E_2) = 2a\}$

$$\tilde{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xu_1 + yu_2 \in C\} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Κανονική} \\ \text{εξίσωση ελλειψης} \end{array} \right|$$

$$\text{Έστω } \tilde{x} \in \tilde{C}, \quad d(\tilde{x}, E_1) + d(\tilde{x}, E_2) = 2a$$

$$d(\tilde{x}, E_1) = \|(xu_2 + yu_2) - \gamma u_2\| + \|(xu_1 + yu_2) - \gamma u_1\| = 2a$$

$$\Rightarrow \|(x - \gamma)u_2 + yu_2\| + \|(x + \gamma)u_2 + yu_2\| = 2a$$

$$\Rightarrow \|(x + \gamma)u_2 + yu_2\| = 2a - \|(x - \gamma)u_2 + yu_2\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|(x + \gamma)u_2 + yu_2\|^2 = (2a - \|(x - \gamma)u_2 + yu_2\|)^2 \Rightarrow$$

$$\|(x + \gamma)u_2 + yu_2\|^2 = 4a^2 - 4a\|(x - \gamma)u_2 + yu_2\| + \|(x - \gamma)u_2 + yu_2\|^2$$

$$\Rightarrow (x+j)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-j)^2 + y^2 - 4a \|(x-j)u_1 + yu_2\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy + y^2 = 4a^2 + x^2 + j^2 - 2jx + y^2 - 4a \|(x-j)u_1 + yu_2\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4jx - 4a^2 = -4a \|(x-j)u_1 + yu_2\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - jx = a \|(x-j)u_1 + yu_2\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 - jx)^2 = a^2 ((x-j)^2 + y^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 + j^2 x^2 - 2a^2 jx = a^2 (x^2 + j^2 - 2jx + y^2) = a^2 x^2 + a^2 j^2 - 2a^2 jx + a^2 y^2$$

$$\Rightarrow x^2(a^2 - j^2) + a^2 y^2 = a^4 - a^2 j^2 = a^2(a^2 - j^2) = a^2 b^2 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

